CURS DE FÍSICA ESTADÍSTICA

TEORIA DE LA PROBABILITAT - REPÀS

PERMUTACIONS I COMBINACIONS

En aplicar la teoria de la probabilitat a situacions reals trobem problemes de comptatge complexos. És útil de recordar dos principis importants:

(i) *Principi d'addició*: Considerem dues operacions mútuament excloents. Si la primera es pot dur a terme de m maneres i la segona de n maneres, una o l'altra es poden dur a terme de $m+n$ maneres.

(ii) *Principi de multiplicació*: Considerem una primera operació que es pot dur a terme de n maneres, i una segona operació que es pot dur a terme de m maneres. Si duem a terme la primera operació i a continuació la segona, el conjunt de les dues operacions es pot dur a terme de $n \times m$ maneres.

Sovint és necessari trobar el nombre de *permutacions* o *combinacions* d'un cert nombre d'elements. Recordem aquestes operacions:

- Una *permutació* és la disposició d'un conjunt de N elements distints en un ordre determinat.

  El nombre de permutacions diferents de N elements distints és $N!$

  El nombre de permutacions diferents de R elements qualsevols agafats del conjunt de N elements distints és $N!/(N-R)!$

- Una *combinació* és la selecció de N elements distints sense importar el seu ordre.

  El nombre de combinacions diferents de R elements qualsevols agafats del conjunt de N elements distints és $N!/(N-R)!R!$

Sigui un conjunt de N elements que conté n_1 elements idèntics d'un tipus, n_2 elements idèntics d'un altre tipus, ..., i n_k elements idèntics d'un altre tipus (i per tant $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$). El nombre de permutacions possibles d'aquests N elements és $N!/n_1!n_2!\cdots n_k!$

DEFINICIÓ DE PROBABILITAT

Una probabilitat és una expressió quantitativa del que esperem com a resultat d'un esdeveniment o experiment.

Suposem que A és un dels resultats possibles d'un experiment. Aleshores, la probabilitat de que tingui lloc A és $P(A)$ si, de N experiments idèntics, esperem que $NP(A)$ donaran el resultat A, si més no en el límit de N molt gran $(N \to \infty)$.

El concepte d'espai mostra és útil per obtenir relacions entre probabilitats i per analitzar experiments. Un *espai mostra* d'un experiment, S, és un conjunt d'elements tal que qualsevol resultat de l'experiment correspon a un o més elements del conjunt. Un *succés*, A, és un subconjunt d'un espai mostra d'un experiment. La probabilitat d'un succés es troba de la manera següent:

(i) Es construeix l'espai mostra S de tots els resultats possibles.

(ii) S'assignen probabilitats als elements (mostres) de l'espai mostra.

En el cas particular d'un espai mostra de N resultats equiprobables, s'assigna la probabilitat $1/N$ a cada mostra.

(iii) La probabilitat d'un succés A s'obté sumant les probabilitats assignades als elements del subconjunt de S que correspon a A.

Repassem algunes relacions útils entre les probabilitats de successos diferents. Com hem dit, denominarem $P(A)$ a la probabilitat de que el resultat de l'experiment sigui el succés A. Així, $P(\emptyset) = 0$ i $P(S) = 1$, on $\emptyset$ és el conjunt buit. A més, denominarem $P(A \cap B)$ a la probabilitat de que *tots dos* successos A i B s'obtinguin com a resultat d'un experiment. Finalment, denominarem $P(A \cup B)$ a la probabilitat de que el succés A, o el succés B, o tots dos, s'obtinguin com a resultat d'un experiment.

Es verifica:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1}$$

Si els successos A i B són mútuament excloents es verifica $A \cap B = \emptyset$, i la relació anterior s'escriu:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{2}$$

Si els successos $A_1, A_2, \cdots, A_m$ són mútuament excloents ($A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m = 0$) i exhaustius ($A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = S$), aquests m successos formen una *partició* de l'espai mostra S en m subconjunts. Si $A_1, A_2, \cdots, A_m$ formen una partició, aleshores:

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_m) = 1. \tag{3}$$

Diem que dos successos A i B són *independents* si i només si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{4}$$

No s'ha de confondre el concepte de successos independents amb el de successos mútuament excloents, que no té res a veure. En particular, notem que si A i B són independents $P(A \cap B) \neq 0$, mentre que si són mútuament excloents $P(A \cap B) = 0$.

La probabilitat condicionada $P(B|A)$ dóna la probabilitat de que el succés A sigui el resultat d'un experiment si B també ho és. Es defineix per l'equació:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{5}$$

La probabilitat condicionada $P(B|A)$ és essencialment la probabilitat del succés A si usem com espai mostra el conjunt B en comptes de S. Com que $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, es verifica que

$$P(A)P(A|B) = P(B)P(B|A). \tag{6}$$

Quan A i B són independents, es verifica que

$$P(B|A) = P(A). \tag{7}$$

FUNCIONS DE DISTRIBUCIÓ

Una variable aleatòria (o *estocàstica*) X és una variable que pren com a valors, $\{x_i\}$, els valors numèrics resultants d'un experiment. Una variable aleatòria és per tant una funció que assigna un nombre real a cada punt d'un espai mostra S. Exemples de variables estocàstiques són:

(i) El nombre de "creus" que s'obté cada cop que es llencen tres monedes.

(ii) El valor total dels daus quan es llencen quatre daus simultàniament.

Variables estocàstiques discretes

Sigui X una variable estocàstica sobre S que pot prendre un conjunt numerable (finit o infinit) de valors $X(S) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Si es defineix una probabilitat $f(x_i)$ per a cada valor de x_i:

$$f(x_i) = P(X = x_i), \tag{8}$$

el conjunt $X(S)$ esdevé un espai de probabilitat. El conjunt de valors $f(x_i)$ és la *distribució de probabilitat* de S. Ha de satisfer les condicions:

$$f(x_i) \geq 0, \tag{9}$$

$$\sum_i f(x_i) = 1, \tag{10}$$

on la suma es pren sobre tots els valors $\{x_i\}$ de la variable estocàstica X. Si es coneix la funció de distribució $f(x_i)$ de la variable estocàstica X, es coneix tota la informació disponible sobre aquesta variable. Sovint, però, és difícil determinar $f(x_i)$ a la pràctica.

El *moment* n-èssim de X es defineix:

$$\langle X^n \rangle = \sum_i x_i^n f(x_i). \tag{11}$$

Els moments de X són útils perquè donen informació sobre la forma de la funció de distribució, i sovint són més accessibles. Els moments més importants són els d'ordre més baix, que contenen informació sobre el comportament global de la distribució de probabilitat. Relacionats amb aquests moments, es defineixen:

(i) La mitja, o valor esperat de X:

$$\langle X \rangle = \sum_i x_i f(x_i). \tag{12}$$

(ii) La variança de X:

$$\left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle, \tag{13}$$

que equival a:

$$\left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2, \tag{14}$$

i a partir de la qual es defineix la desviació típica de X com:

$$\sigma_X \equiv \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}. \tag{15}$$

La desviació típica dóna una mesura de l'amplada de la distribució $f(x_i)$. Si la desviació típica és petita, $f(x_i)$ és molt picada al voltant de $\langle X \rangle$ i podem estar força segurs de que X tindrà un valor proper a $\langle X \rangle$.

Variables estocàstiques contínues

Sigui X una variable estocàstica que pot prendre un conjunt continu de valors (per exemple, un interval de la recta real). Per definició de variable aleatòria, un interval $[a, b]$ correspon a un succés. Suposem que existeix una funció $f_X(x)$, contínua a trossos, tal que la probabilitat $P(a \leq X \leq b)$ de que X prengui un valor dins de l'interval $[a, b]$ ve donada per l'àrea entre a i b sota la corba $f_X(x)$:

$$\int_a^b f_X(x)dx = P(a \leq X \leq b). \tag{16}$$

Aleshores X és una variable estocàstica contínua i $f_X(x)$ és la *densitat de probabilitat* de X. La densitat de probabilitat ha de satisfer les condicions:

$$f_X(x) \geq 0, \tag{17}$$

$$\int f_X(x)dx = 1, \tag{18}$$

on la integral es calcula sobre tot el rang de X.

De nou és útil definir els moments de X. El moment n-èssim es defineix:

$$\langle X^n \rangle = \int dx x^n f_X(x). \tag{19}$$

La mitja o valor esperat de X, la variança i la desviació típica es defineixen com abans. La densitat de probabilitat està completament especificada si es coneixen tots els moments. És fàcil veureu-ho introduint la *funció característica* $\phi_X(k)$ de la variable aleatòria X, que es defineix com:

$$\phi_X(k) = \left\langle e^{ikX} \right\rangle = \int dx e^{ikx} f_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \langle X^n \rangle}{n!}. \tag{20}$$

Aquesta expansió en sèrie només té sentit si els moments $\langle X^n \rangle$ d'ordre més alt són prou petits per a que la sèrie convergeixi. La densitat de probabilitat és la transformada de Fourier de la funció característica:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikx} \phi_X(k). \tag{21}$$

Per tant, coneguts tots els moments $\langle X^n \rangle$, la densitat de probabilitat es pot calcular amb les dues equacions anteriors. Recíprocament, si ens donen la funció característica podem calcular els moments per derivació:

$$\langle X^n \rangle = \frac{1}{i^n} \left. \frac{d^n \phi_X(k)}{dk^n} \right|_{k=0}. \tag{22}$$

Sigui X una variable estocàstica contínua, i $H(X)$ una funció de X. La variable $Y = H(X)$ és una nova variable estocàstica. La densitat de probabilitat de Y ve donada per:

$$f_Y(y) = \int dx \delta(y - H(x)) f_X(x), \tag{23}$$

on $\delta(y - H(x))$ és la funció delta de Dirac.

Densitat de probabilitat conjunta

Siguin X i Y variables estocàstiques discretes que prenen els valors $X(S) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ i $Y(S) = \{y_1, y_2, \ldots\}$ sobre un espai mostra S. Podem definir la probabilitat de la parella ordenada $\{x_i, y_j\}$ com

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j). \tag{24}$$

Aleshores el conjunt producte $X(S) \times Y(S) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_i, y_j), \ldots\}$ és un espai de probabilitat, i la funció $f(x_i, y_j)$ és la *distribució de probabilitat conjunta* de la variable (X, Y).

Si les variables estocàstiques X i Y són contínues —com en tot el que segueix— escrivim la *densitat de probabilitat conjunta* de (X, Y) com $f(x, y)$ i integrem enlloc de sumar sobre les variables x i y, de manera que:

$$\int \int_{\Omega} dx dy f(x, y) \tag{25}$$

és la probabilitat de que la variable (X, Y) prengui valors en una regió Ω. La densitat de probabilitat conjunta ha de satisfer les condicions:

$$f(x, y) \geq 0, \tag{26}$$

$$\int \int dx dy f(x, y) = 1, \tag{27}$$

on la darrera integral s'exten a tot l'espai de valors de la variable (X, Y). La noció de funció de distribució conjunta es pot extendre a qualsevol nombre finit de variables estocàstiques.

La *covariància* de X i Y es defineix com:

$$cov(X, Y) = \int \int dx dy (x - \langle X \rangle)(y - \langle Y \rangle) f(x, y) \tag{28}$$

$$= \int\int dxdyxyf(x,y) - \langle X\rangle\langle Y\rangle = \langle XY\rangle - \langle X\rangle\langle Y\rangle. \quad (29)$$

La *correlació* de X i Y es defineix com:

$$cor(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (30)$$

La correlació no té dimensions, i verifica:

(i) $cor(X,Y) = cor(Y,X)$.

(ii) $-1 \leq cor(X,Y) \leq 1$.

(iii) $cor(X,X) = 1, \;\; cor(X,-X) = -1$.

(iv) $cor(aX+b, cY+d) = cor(X,Y) \quad$ si $\quad a, c \neq 0$.

Densitat de probabilitat marginal
Donada la variable aleatòria contínua (X,Y), amb densitat de probabilitat $f(x,y)$, es poden calcular les densitats de probabilitat de cadascuna de les variables, integrant sobre l'altra variable:

$$f_X(x) = \int dyf(x,y), \quad (31)$$

$$f_Y(y) = \int dxf(x,y). \quad (32)$$

$f_X(x)$ i $f_Y(y)$ es coneixen com *densitats de probabilitat marginal.*

Densitat de probabilitat condicionada
Donada la variable aleatòria contínua (X,Y), amb densitat de probabilitat $f(x,y)$, es defineix la *densitat de probabilitat condicionada* $f(x|y)$ com la densitat de probabilitat de la variable X suposat que $Y=y$:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}. \quad (33)$$

Dues variables aleatòries X i Y són *estadísticament independents* si

$$f(x|y) = f_X(x). \quad (34)$$

Aleshores es verifiquen les següents propietats:

(i) $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad$ (la densitat de probabilitat conjunta factoritza).

(ii) $\langle XY\rangle = \langle X\rangle\langle Y\rangle$.

(iii) $\left\langle (X+Y)^2\right\rangle - \langle X+Y\rangle^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 + \langle Y^2\rangle - \langle Y\rangle^2$.

(iv) $cov(X,Y) = 0$.

La recíproca de **(iv)** no és certa: $cov(X,Y) = 0$ no implica necessàriament que X i Y siguin independents.

DISTRIBUCIÓ EXPONENCIAL

Una densitat de probabilitat que apareix freqüentment en el contexte de la física estadística és la *densitat de probabilitat exponencial*:

$$f_X(x) = Ne^{-\alpha x}, \quad (35)$$

on x pren valors en l'interval $[0, \infty)$ de la recta real.

Per fer càlculs amb aquesta densitat de probabilitat, és útil de recordar que:

$$\int_0^\infty dx x^n e^{-\alpha x} = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \qquad \alpha > 0,\ n > -1. \tag{36}$$

La condició de normalització imposa:

$$1 = \int_0^\infty dx f_X(x) = N\frac{1}{\alpha} \tag{37}$$

i per tant:

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}. \tag{38}$$

Els primers moments de la distribució es calculen de forma senzilla:

$$\langle X \rangle = \int_0^\infty dx x f_X(x) = \alpha \int_0^\infty dx x e^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha}, \tag{39}$$

$$\left\langle X^2 \right\rangle = \int_0^\infty dx x^2 f_X(x) = \alpha \int_0^\infty dx x^2 e^{-\alpha x} = \frac{2}{\alpha^2}. \tag{40}$$

Notem que la densitat de probabilitat exponencial es determina completament amb el primer moment. La desviació típica és:

$$\sigma = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} = \frac{1}{\alpha}. \tag{41}$$

Un mètode alternatiu de calcular els moments, molt útil, és el *mètode de la funció de partició.* Considerem la quantitat

$$Z(\alpha) \equiv \int_0^\infty dx e^{-\alpha x}, \tag{42}$$

que anomenem funció de partició. El primer moment es pot obtenir com:

$$\langle X \rangle = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln Z(\alpha). \tag{43}$$

En efecte:

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln Z(\alpha) = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = \frac{\int_0^\infty dx x e^{-\alpha x}}{\int_0^\infty dx e^{-\alpha x}} \equiv \langle X \rangle. \tag{44}$$

Anàlogament, la variança es pot obtenir com:

$$\sigma^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln Z(\alpha). \tag{45}$$

En efecte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln Z(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\frac{\partial Z}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\int_0^\infty dx x^2 e^{-\alpha x}}{\int_0^\infty dx e^{-\alpha x}} - \left[\frac{\int_0^\infty dx x e^{-\alpha x}}{\int_0^\infty dx e^{-\alpha x}}\right]^2 = \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2 \equiv \sigma^2. \end{aligned} \tag{46}$$

Per tant, tota la informació rellevant pot obtenir-se de les derivades de $Z(\alpha)$. N'hi ha prou amb calcular aquesta funció:

$$Z(\alpha) = \int_0^\infty dx e^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha}, \tag{47}$$

per obtenir:

$$\ln Z = -\ln \alpha, \tag{48}$$

$$\langle X \rangle = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln Z(\alpha) = \frac{1}{\alpha}, \tag{49}$$

$$\sigma^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln Z(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}. \tag{50}$$

Aquest mètode simplifica molt els càlculs, i sovint es pot generalitzar a altres densitats de probabilitat.

DISTRIBUCIÓ BINOMIAL

Considerem un experiment que té únicament dos possibles resultats, i que repetim un gran nombre N de vegades. La distribució de probabilitat d'un dels dos resultats rep el nom de *distribució binomial.*

Suposem que els únics resultats possibles d'un experiment són $+1$, amb probabilitat p, i -1, amb probabilitat $q = 1 - p$. Considerem una seqüència de N resultats de l'experiment, estadísticament independents. La probabilitat de que el nombre de resultats $+1$ en la seqüència sigui n (i el de -1 sigui per tant $N - n$) es calcula així:
(i) Com que els N resultats són estadísticament independents, una seqüència donada (permutació) amb n valors $+1$ i $N - n$ valors -1 té una probabilitat d'aparéixer:

$$p^n (1-p)^{N-n}. \tag{51}$$

(ii) Es tracta d'obtenir n resultats $+1$, però no importa l'ordre en que apareguin. Hi ha

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{52}$$

seqüències possibles (permutacions) que contenen n resultats $+1$ i $N - n$ resultats -1.
En definitiva, la probabilitat d'obtenir n resultats $+1$ en N repeticions de l'experiment és

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}, \tag{53}$$

i es diu que la variable aleatòria n segueix una distribució de probabilitat binomial. Aquesta distribució està normalitzada, ja que el teorema del binomi permet escriure:

$$\sum_{n=0}^{N} P_N(n) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = (p + (1-p))^N = 1. \tag{54}$$

Els moments de la distribució poden calcular-se de la manera següent. Definim la funció:

$$g_k(p,q) \equiv \sum_{n=0}^{N} n^k \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \tag{55}$$

i l'avaluem fent

$$g_k(p,q) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^k p^n q^{N-n} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^k \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^k (p+q)^N . \tag{56}$$

Així tenim que $g_1(p,q) = Np(p+q)^{N-1}$, i per tant el primer moment de la distribució (el nombre mig de resultats $+1$) ve donat per:

$$\langle n \rangle = g_1(p, 1-p) = Np. \tag{57}$$

Anàlogament $g_2(p,q) = Np(Np+q)(p+q)^{N-2}$, i per tant el segon moment de la distribució és:

$$\left\langle n^2 \right\rangle = g_2(p, 1-p) = Np(Np + 1 - p). \tag{58}$$

La variança és per tant:

$$\sigma_N^2 = \left\langle n^2 \right\rangle - \langle n \rangle^2 = Np(1-p) \tag{59}$$

i la desviació típica:

$$\sigma_N = \sqrt{Np(1-p)}. \tag{60}$$

DISTRIBUCIONS NORMAL I GAUSSIANA

En el límit en que el nombre d 'experiments N és molt gran, i també el producte Np és molt gran (p no massa petit), es pot demostrar que la distribució binomial per a la variable aleatòria n (nombre de resultats +1) tendeix a una distribució *gaussiana*, centrada a $\langle n \rangle = Np$ i amb desviació típica $\sigma_N = \sqrt{Np(1-p)}$, de la forma:

$$P_N(n) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2\sigma_N^2}\right]. \tag{61}$$

Per a una variable aleatòria contínua, X, que segueix una distribució gaussiana, la densitat de probabilitat ve donada per:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{62}$$

on x pren valors en tota la recta real. Les constants μ i σ corresponen, respectivament, al valor mig i a la desviació típica de la variable X, com comprovarem més endavant. La distribució gaussiana és simètrica al voltant de μ.

Un cas particular de distribució gaussiana és la distribució *normal*:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right], \tag{63}$$

que correspon a una gaussiana amb $\mu = 0$ i $\sigma = 1$. El factor $1/\sqrt{2\pi}$ prové de la condició de normalització:

$$\int dx f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{2}) = 1. \tag{64}$$

Els moments senars de la distribució normal són nuls perquè la integral corresponent té com integrand una funció imparella al voltant del zero. Els moments parells venen donats per:

$$\langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = (n-1)(n-3)\ldots 3 \cdot 1. \tag{65}$$

Així tenim

$$\langle X \rangle = 0, \tag{66}$$

$$\left\langle X^2 \right\rangle = 1, \tag{67}$$

i per tant

$$\sigma = \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2 = 1. \tag{68}$$

El segon moment de la distribució normal també pot calcular-se definint una "funció de partició" Z :

$$Z(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-\alpha x^2\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{1/2}}. \tag{69}$$

Es pot veure que:

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln Z(\alpha) = -\frac{1}{Z(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} Z(\alpha) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \exp\left[-\alpha x^2\right]}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-\alpha x^2\right]} = \left\langle X^2 \right\rangle, \tag{70}$$

i per tant:

$$\left\langle X^2\right\rangle = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\ln\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{1/2}}\right) = \frac{1}{2\alpha}, \tag{71}$$

que es correspon amb el resultat $\langle X^2\rangle = 1$ quan la distribució és normal i per tant $\alpha = 1/2$.

Sigui X una variable aleatòria normal. Aleshores

$$Y \equiv \mu + \sigma X \tag{72}$$

és gaussiana, de valor mig μ i desviació típica σ. Per comprovar-ho, només cal tenir en compte que la variable $X = (Y-\mu)/\sigma$ segueix una distribució normal, i per tant

$$f_Y(y) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{73}$$

i imposar la condició de normalització

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy f_Y(y) = 1 \tag{74}$$

que determina la constant de proporcionalitat. El resultat final és efectivament:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{75}$$

Aquest resultat és útil per calcular els moments de la distribució gaussiana, aprofitant que ja hem calculat els moments de la distribució normal:

$$\langle Y\rangle = \mu + \sigma\langle X\rangle = \mu, \tag{76}$$

$$\left\langle Y^2\right\rangle = \left\langle(\mu+\sigma\langle X\rangle)^2\right\rangle = \left\langle\mu^2 + 2\mu\sigma X + \sigma^2 X^2\right\rangle = \mu^2 + 2\mu\sigma\langle X\rangle + \sigma^2\left\langle X^2\right\rangle = \mu^2+\sigma^2, \tag{77}$$

$$\left\langle Y^3\right\rangle = \left\langle(\mu+\sigma\langle X\rangle)^3\right\rangle = \left\langle\mu^3 + 3\mu^2\sigma X + 3\mu\sigma^2 X^2 + \sigma^3 X^3\right\rangle = \mu^3 + 3\mu\sigma^2, \tag{78}$$

$$\vdots$$

Així comprovem que la distribució gaussiana, tal i com l'hem definida a l'inici d'aquesta secció, té efectivament valor mig μ i desviació típica σ. La distribució gaussiana, per tant, ve determinada completament pels seus dos primers moments.

DISTRIBUCIÓ DE POISSON

En el límit en que el nombre d 'experiments N és molt gran ($N\to\infty$), però la probabilitat p del resultat $+1$ és molt petita ($p\to 0$), de manera que el producte $Np = a$ es manté finit, es pot demostrar que la distribució binomial per a la variable aleatòria n (nombre de resultats $+1$) tendeix a una *distribució de Poisson:*

$$P_N(n) = \frac{a^n}{n!}e^{-a} \tag{79}$$

La distribució de Poisson està normalitzada:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}e^{-a} = e^a e^{-a} = 1. \tag{80}$$

Els moments de la distribució es poden calcular per un mètode similar al que hem fet servir per a la distribució binomial. Tenim:

$$\left\langle n^k\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^k\frac{a^n}{n!}e^{-a} = e^{-a}\left(a\frac{\partial}{\partial a}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!} = e^{-a}\left(a\frac{\partial}{\partial a}\right)^k e^a. \tag{81}$$

Els dos primers moments són:

$$\langle n\rangle = a, \tag{82}$$

$$\left\langle n^2\right\rangle = a^2 + a. \tag{83}$$

La desviació típica és:

$$\sigma = \sqrt{a}. \tag{84}$$

La distribució de Poisson està determinada completament en termes del seu primer moment, $\langle n\rangle = a$.

TEOREMA DEL LÍMIT CENTRAL

Donada una variable aleatòria X amb densitat de probabilitat $f_X(x)$, volem trobar la distribució de la variable aleatòria Y, definida com el promig de N mesures de X:

$$y_N = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}. \tag{85}$$

Considerem la densitat de probabilitat $f_Y\left(y_N - \langle X\rangle\right)$. La seva funció característica es pot escriure:

$$\begin{aligned}\Phi(k) &= \int e^{ik(y_N-\langle X\rangle)} f_Y\left(y_N - \langle X\rangle\right) dy_N \\ &= \int e^{i(k/N)[(x_1-\langle X\rangle)+(x_2-\langle X\rangle)+\cdots+(x_N-\langle X\rangle)]} f_X(x_1) f_X(x_2)\cdots f_X(x_N) dx_1\cdots dx_N \\ &= \left[\phi\left(\frac{k}{N}\right)\right]^N.\end{aligned} \tag{86}$$

Si $\sigma^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$, aleshores:

$$\phi\left(\frac{k}{N}\right) = \int e^{i(k/N)(x_1-\langle X\rangle)} f_X(x_1) dx_1 = 1 - \frac{1}{2}\frac{k^2}{N^2}\sigma^2 + \cdots \tag{87}$$

Com que $e^{i(k/N)x_1}$ és una funció oscil.lant, la funció $\phi\left(\frac{k}{N}\right)$ decaurà a mesura que k augmenti. La funció $\left[\phi\left(\frac{k}{N}\right)\right]^N$ decaurà encara més ràpidament a mesura que k augmenti. A més, si la funció $f_X(x_1)$ va prou ràpidament a zero quan $x_1 \to \infty$, els moments seran finits i:

$$\Phi(k) = \left[1 - \frac{1}{2}\frac{k^2}{N^2}\sigma^2 + O\left(\frac{k^3}{N^3}\right)\right]^N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} e^{-k^2\sigma^2/2N}. \tag{88}$$

Així, la densitat de probabilitat $f_Y\left(y_N - \langle X\rangle\right)$ es converteix en:

$$\begin{aligned}f_Y\left(y_N - \langle X\rangle\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(y_N-\langle X\rangle)}\Phi(k) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(y_N-\langle X\rangle)} e^{-k^2\sigma^2/2N} e \\ &= \sqrt{\frac{N}{2\pi}}\frac{1}{\sigma} e^{-N(y_N-\langle X\rangle)^2/2\sigma^2}.\end{aligned} \tag{89}$$

Per tant, independentment de la forma de $f_X(x)$, el promig d'un nombre molt gran de mesures de X és una variable gaussiana centrada a $\langle X\rangle$, amb desviació típica $N^{-1/2}$ vegades la desviació típica de $f_X(x)$. Per a que aquest resultat sigui vàlid, només cal que $f_X(x)$ tingui els moments finits, que les mesures de X siguin estadísticament independents, i que N sigui prou gran. Aquest resultat s'anomena el *teorema del límit central*, i permet explicar perquè molts fenòmens que s'observen a la Natura es poden descriure amb una distribució gaussiana.

LLEI DELS GRANS NOMBRES

La llei dels grans nombres és a la base del concepte intuitiu de probabilitat que hem enunciat a l'inici d'aquest resum. Tot i que el teorema del límit central inclou molt del contingut de la llei dels grans nombres, aquesta és més general, i per tant convé discutir-la breument.

La llei dels grans nombres s'aplica a N experiments independents. Suposem que un succés A té probabilitat p d'ocòrrer. La llei dels grans nombres diu que, en el límit $N \to \infty$, del total de N experiments obtindrem pN resultats del tipus A.

La llei dels grans nombres es pot provar amb més o menys generalitat. Aquí donarem una prova bastant restrictiva, que consta de dues parts. La primera part és la deducció de l'anomenada desigualtat de Tchebycheff. La segona part és la demostració de la llei dels grans nombres a partir d'aquesta desigualtat.

La desigualtat de Tchebycheff estableix una relació entre la variança i la probabilitat de que una variable estocàstica es pugui desviar del seu valor promig en una quantitat arbitrària $\epsilon > 0$. Escrivim la variança de la variable aleatòria X com:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, (x - \langle x \rangle)^2 \, f_X(x). \tag{90}$$

Eliminem ara el rang de la variable x per al qual $|x - \langle x \rangle| \leq \epsilon$. Podem escriure:

$$\sigma_X^2 \geq \int_{-\infty}^{\langle x \rangle - \epsilon} dx \, (x - \langle x \rangle)^2 \, f_X(x) + \int_{\langle x \rangle + \epsilon}^{\infty} dx \, (x - \langle x \rangle)^2 \, f_X(x). \tag{91}$$

A les dues integrals es verifica que $|x - \langle x \rangle|^2 \geq \epsilon^2$, i per tant podem substituïr $(x - \langle x \rangle)^2$ per ϵ^2 mantenint la desigualtat:

$$\sigma_X^2 \geq \epsilon^2 \left[\int_{-\infty}^{\langle x \rangle - \epsilon} dx \, f_X(x) + \int_{\langle x \rangle + \epsilon}^{\infty} dx \, f_X(x) \right] = \epsilon^2 P\left(|x - \langle x \rangle| \geq \epsilon\right), \tag{92}$$

on $P\left(|x - \langle x \rangle| \geq \epsilon\right)$ és la probabilitat de que la variable estocàstica X es desvii de$\langle x \rangle$ en més de $\pm\epsilon$. Així arribem a la desigualtat de Tchebycheff:

$$P\left(|x - \langle x \rangle| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{\epsilon^2}. \tag{93}$$

Si la variança σ_X^2 està fixada, la probabilitat de que x difereixi de $\langle x \rangle$ en més de $\pm\epsilon$ decau com ϵ^2.

Passem ara a la llei dels grans nombres. Considerem N experiments independents que mesuren la variable aleatòria X. Definim de nou el valor mig dels resultats de les mesures com:

$$y_N = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}. \tag{94}$$

La llei dels grans nombres afirma que la probabilitat de que y_N es desvïi de $\langle x \rangle$ va a zero quan $N \to \infty$, és a dir:

$$\lim_{N \to \infty} P\left(|y_N - \langle x \rangle| \geq \epsilon\right) = 0. \tag{95}$$

Per demostrar-ho, recordem que $\langle y_N \rangle = \langle x \rangle$. A més, com que estudiem successos independents, la variança compleix $\sigma_{y_N}^2 = \sigma_X^2 / N$. Fent ús de la desigualtat de Tchebycheff:

$$P\left(|y_N - \langle x \rangle| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma_{Y_N}^2}{\epsilon^2} = \frac{\sigma_X^2}{N\epsilon^2}. \tag{96}$$

Per tant, en el límit $N \to \infty$ tenim:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(|y_N - \langle x \rangle| \geq \epsilon\right) = 0 \tag{97}$$

sempre que σ_X^2 sigui finit.

La llei dels grans nombres que hem demostrat aquí és una forma particular d'una llei més general deguda a Khintchine.