

Exercici 1: Verifica que les càrregues, Q^a , verifiquen les relacions de commutació del grup de simetria, és a dir,

$$[Q^a, Q^b] = if^{abc}Q^c.$$

Fes servir les relacions de commutació canòniques de la teoria de camps (E.T.C), i.e.

$$\begin{aligned} [\phi_i(x), \phi_j(y)] &= [\pi_i(x), \pi_j(y)] = 0, \quad for \ x^0 = y^0 \\ [\phi_i(x), \pi_j(y)] &= i\delta_{jk}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad for \ x^0 = y^0. \end{aligned}$$

Resposta:

Escrivim, en primer lloc, la càrrega Q^a en termes d'una integral dels camps i dels moments conjugats:

$$Q^a = \int d^3x [-i\pi^\alpha(x)T_{\alpha\beta}^a\phi^\beta(x)].$$

Les relacions de commutació de les càrregues es poden escriure així:

$$[Q^a, Q^b] = \int d^3x \int d^3y (-1) [\pi^\alpha(x)T_{\alpha\beta}^a\phi^\beta(x), \pi^\gamma(y)T_{\gamma\delta}^b\phi^\delta(y)].$$

El commutador que apareix en aquesta integral es pot expandir fent servir

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C.$$

$$\begin{aligned} &[\pi^\alpha(x)T_{\alpha\beta}^a\phi^\beta(x), \pi^\gamma(y)T_{\gamma\delta}^b\phi^\delta(y)] = \\ &\pi^\alpha(x) [T_{\alpha\beta}^a\phi^\beta(x), \pi^\gamma(y)T_{\gamma\delta}^b\phi^\delta(y)] + [\pi^\alpha(x), \pi^\gamma(y)T_{\gamma\delta}^b\phi^\delta(y)] T_{\alpha\beta}^a\phi^\beta(x) = \\ &\pi^\alpha(x) [T_{\alpha\beta}^a\phi^\beta(x), \pi^\gamma(y)] T_{\gamma\delta}^b\phi^\delta(y) + \pi^\gamma(y) [\pi^\alpha(x), T_{\gamma\delta}^b\phi^\delta(y)] T_{\alpha\beta}^a\phi^\beta(x) = \end{aligned}$$

És important notar que els elements com $T_{\alpha\beta}^a$ no són matriux, sinó elements de matriu, per la qual cosa commuten amb tot. L'última expressió es pot escriure així:

$$\begin{aligned} &\pi^\alpha(x)T_{\alpha\beta}^a \left(i\delta^{\beta\gamma}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \right) T_{\gamma\delta}^b\phi^\delta(y) + \pi^\gamma(y)T_{\gamma\delta}^b \left(-i\delta^{\alpha\delta}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \right) T_{\alpha\beta}^a\phi^\beta(x) = \\ &\pi^\alpha(x)[T^a, T^b]_{\alpha\beta}\phi^\beta(x)i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = if^{abc}\pi^\alpha(x)T_{\alpha\beta}^c\phi^\beta(x)i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned}$$

Això ens duu a

$$\begin{aligned}
[Q^a, Q^b] &= if^{abc} \int d^3x \int d^3y \left(-i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \pi^\alpha(x) T_{\alpha\beta}^c \phi^\beta(x) \right) = if^{abc} \int d^3x \left(-i\pi^\alpha(x) T_{\alpha\beta}^c \phi^\beta(x) \right) \\
&= if^{abc} Q^c,
\end{aligned}$$

fet que prova l'enunciat de l'exercici.

Exercici 2: Prova que

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_+ \quad ; \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_- \quad (1)$$

Recorda que $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

Resposta:

Per tal de resumir les dues equacions en (1), fem servir la notació

$$\psi_\pm = P_\pm \psi.$$

Els fermions barrats i projectats quiralmment es poden escriure així:

$$\bar{\psi}_\pm = \psi_\pm^\dagger \gamma^0 = (\psi^\dagger P_\pm^\dagger) \gamma^0.$$

En aquest punt, cal adonar-se que el fet que $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ implica que $P_\pm^\dagger = P_\pm$, per la qual cosa

$$\bar{\psi}_\pm = \left(\psi^\dagger \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \gamma^0.$$

Fent servir la relació d'anticommutació $\{\gamma_5, \gamma^0\} = 0$, s'acaba trobant que

$$\bar{\psi}_\pm = \left(\psi^\dagger \gamma^0 \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \right) = \bar{\psi} P_\mp,$$

que demostra (1).

Exercici 3: Verifica que γ^0 canvia la quiralitat dels camps. És cert que $\psi'_L = \psi_R$? Escriu el terme de massa del lagrangia en termes dels camps quirals dret i esquerra. Trenca, el terme de massa, la paritat?

Resposta:

Per tal de verificar que γ^0 canvia la quiralitat dels camps, considerem un camp purament dret, ψ_R , que es pot escriure com la projecció cap a la dreta d'algun camp ψ . Per tal de verificar que $\gamma^0 \psi_R$ és purament esquerre, projectem aquest camp a través dels projectors dret i esquerre:

$$\begin{aligned}
P_+ \gamma^0 \psi_R &= \gamma^0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = 0, \\
P_- \gamma^0 \psi_R &= \gamma^0 \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = \gamma^0 \psi_R,
\end{aligned}$$

on s'ha fet servir que $\gamma_5^2 = 1$. En aquestes equacions, un pot veure-hi que $\gamma^0\psi_R$ és esquerre, ja que no té projecció cap a la dreta i és igual a la seva projecció cap a l'esquerra.

El mateix procediment es pot fer servir per a projectar un camp purament esquerre:

$$\begin{aligned} P_- \gamma^0 \psi_L &= \gamma^0 \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = 0, \\ P_+ \gamma^0 \psi_L &= \gamma^0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = \gamma^0 \psi_L, \end{aligned}$$

que mostra que $\gamma^0\psi_L$ és un camp dret.

La part esquerra d'un camp ψ transformada sota paritat és

$$\psi'_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi' = \frac{1 - \gamma_5}{2} \gamma^0 \psi = \gamma^0 \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = \gamma^0 \psi_R,$$

per la qual cosa està clar que no és cert que $\psi'_L = \psi_R$ (sic).

El terme de massa al lagrangiana és

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} &= -m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) = \\ &= -m(\bar{\psi}_L\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_R\psi_R) \end{aligned}$$

Fent servir que $\bar{\psi}_\pm = \bar{\psi}P_\mp$, i el fet que $P_\pm P_\mp = 0$, tenim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} &= -m(\bar{\psi}P_+P_-\psi + \bar{\psi}P_+P_+\psi + \bar{\psi}P_-P_-\psi + \bar{\psi}P_-P_+\psi) \\ &= -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L). \end{aligned}$$

Per tal de veure que el terme de massa no trenca paritat, transformem aquest terme sota paritat, és a dir, multipliquem els camps per γ^0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{mass} &= -m\psi'^\dagger\gamma^0\psi' = -m\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^0\psi = -m\psi^\dagger\gamma^0\psi \\ &= -m\bar{\psi}\psi, \end{aligned}$$

de manera que el terme de massa es manté invariant sota la transformació de paritat.

Ejercicio 4: Las interacciones (vectoriales o axial-vectoriales) siempre preservan helicidad, mientras que las escalares y pseudoescalares no. Probarlo!

Respuesta:

Sabemos que

$$J_3\psi_R = +\frac{1}{2}\psi_R \quad (2)$$

$$J_3\psi_L = -\frac{1}{2}\psi_L \quad (3)$$

Y si aplicamos los operadores de proyección $P_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ obtenemos que,

$$P_- \psi = \psi_L \quad (4)$$

$$P_+ \psi = \psi_R \quad (5)$$

Por lo tanto los P proyectan los estados de helicidad con autovalores $\lambda = \pm \frac{1}{2}$.
NOTA:

$$\bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma^0 \quad (6)$$

$$\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma^0 \quad (7)$$

$$\psi_L^\dagger = \psi^\dagger P_- \quad (8)$$

$$\psi_R^\dagger = \psi^\dagger P_+ \quad (9)$$

En el caso del vector

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L) \gamma^\mu (\psi_R + \psi_L) \quad (10)$$

$$= \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \quad (11)$$

Veamos término a término:

Primer término

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R = (\psi_R^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu P_+ \psi \quad (12)$$

$$= (\psi^\dagger P_+) \gamma^0 \gamma^\mu P_+ \psi \quad (13)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^\mu \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (14)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^\mu \right) \psi \quad (15)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - \gamma^5)^2}{4} \right) \gamma^\mu \psi \quad (16)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 - \gamma^5)^2 = 2 - 2\gamma^5$ y así

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \neq 0 \quad (17)$$

Segundo término

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R = (\psi_L^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu P_+ \psi \quad (18)$$

$$= (\psi^\dagger P_-) \gamma^0 \gamma^\mu P_+ \psi \quad (19)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^\mu \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (20)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^\mu \right) \psi \quad (21)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - (\gamma^5)^2)}{4} \right) \gamma^\mu \psi \quad (22)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ y así

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R = 0 \quad (23)$$

Tercer término

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L = (\psi_R^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu P_- \psi \quad (24)$$

$$= (\psi^\dagger P_+) \gamma^0 \gamma^\mu P_- \psi \quad (25)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (26)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^\mu \right) \psi \quad (27)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - (\gamma^5)^2)}{4} \right) \gamma^\mu \psi \quad (28)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ y así

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L = 0 \quad (29)$$

Cuarto término

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = (\psi_L^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu P_- \psi \quad (30)$$

$$= (\psi^\dagger P_-) \gamma^0 \gamma^\mu P_- \psi \quad (31)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (32)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^\mu \right) \psi \quad (33)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 + \gamma^5)^2}{4} \right) \gamma^\mu \psi \quad (34)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 + \gamma^5)^2 = 2 + 2\gamma^5$ y así

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \neq 0 \quad (35)$$

Finalmente

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \quad (36)$$

Es decir que se conserva la helicidad.

En el caso del vector axial

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi = (\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L) \gamma^\mu \gamma^5 (\psi_R + \psi_L) \quad (37)$$

$$= \bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L \quad (38)$$

Veamos término a término:

Primer término

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R = (\psi_R^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu \gamma^5 P_+ \psi \quad (39)$$

$$= (\psi^\dagger P_+) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 P_+ \psi \quad (40)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \gamma^\mu \left(\gamma^5 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (41)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^\mu \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \gamma^5 \psi \quad (42)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^\mu \right) \gamma^5 \psi \quad (43)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - \gamma^5)^2}{4} \right) \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (44)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 - \gamma^5)^2 = 2 - 2\gamma^5$ y así

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R \neq 0 \quad (45)$$

Segundo término

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R = (\psi_L^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu \gamma^5 P_+ \psi \quad (46)$$

$$= (\psi^\dagger P_-) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 P_+ \psi \quad (47)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \gamma^\mu \left(\gamma^5 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (48)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^\mu \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \gamma^5 \psi \quad (49)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^\mu \right) \gamma^5 \psi \quad (50)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - (\gamma^5)^2)}{4} \right) \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (51)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ y así

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R = 0 \quad (52)$$

Tercer término

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L = (\psi_R^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu \gamma^5 P_- \psi \quad (53)$$

$$= (\psi^\dagger P_+) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 P_- \psi \quad (54)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \gamma^\mu \left(\gamma^5 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (55)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \gamma^5 \psi \quad (56)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^\mu \right) \gamma^5 \psi \quad (57)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - (\gamma^5)^2)}{4} \right) \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (58)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ y así

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L = 0 \quad (59)$$

Cuarto término

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L = (\psi_L^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu \gamma^5 P_- \psi \quad (60)$$

$$= (\psi^\dagger P_-) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 P_- \psi \quad (61)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \gamma^\mu \left(\gamma^5 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (62)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \gamma^5 \psi \quad (63)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^\mu \right) \gamma^5 \psi \quad (64)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 + \gamma^5)^2}{4} \right) \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (65)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 + \gamma^5)^2 = 2 + 2\gamma^5$ y así

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L \neq 0 \quad (66)$$

Finalmente

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \gamma^5 \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \gamma^5 \psi_L \quad (67)$$

Es decir que se conserva la helicidad.

En el caso del escalar

$$\bar{\psi}\psi = (\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)(\psi_R + \psi_L) \quad (68)$$

$$= \bar{\psi}_R\psi_R + \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_L \quad (69)$$

Veamos término a término:

Primer término

$$\bar{\psi}_R\psi_R = (\psi_R^\dagger\gamma^0)P_+\psi \quad (70)$$

$$= (\psi^\dagger P_+)\gamma^0 P_+\psi \quad (71)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1+\gamma^5)}{2}\gamma^0 \right) \frac{(1+\gamma^5)}{2}\psi \quad (72)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_R\psi_R = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1-\gamma^5)}{2} \right) \frac{(1+\gamma^5)}{2}\psi \quad (73)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1-(\gamma^5)^2)}{4} \right) \psi \quad (74)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 - (\gamma^5)^2) = 0$ y así

$$\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R = 0 \quad (75)$$

Segundo término

$$\bar{\psi}_L\psi_R = (\psi_L^\dagger\gamma^0)P_+\psi \quad (76)$$

$$= (\psi^\dagger P_-)\gamma^0 P_+\psi \quad (77)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1-\gamma^5)}{2}\gamma^0 \right) \frac{(1+\gamma^5)}{2}\psi \quad (78)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_L\psi_R = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1+\gamma^5)}{2} \right) \frac{(1+\gamma^5)}{2}\psi \quad (79)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1+\gamma^5)^2}{4} \right) \psi \quad (80)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 + \gamma^5)^2 = 2 + 2\gamma^5$ y así

$$\bar{\psi}_L\psi_R \neq 0 \quad (81)$$

Tercer término

$$\bar{\psi}_R\psi_L = (\psi_R^\dagger\gamma^0)P_-\psi \quad (82)$$

$$= (\psi^\dagger P_+)\gamma^0 P_-\psi \quad (83)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1+\gamma^5)}{2}\gamma^0 \right) \frac{(1-\gamma^5)}{2}\psi \quad (84)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_R \psi_L = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \psi \quad (85)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - \gamma^5)^2}{4} \right) \psi \quad (86)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 - \gamma^5)^2 = 2 - 2\gamma^5$ y así

$$\bar{\psi}_R \psi_L \neq 0 \quad (87)$$

Cuarto término

$$\bar{\psi}_L \psi_L = (\psi_L^\dagger \gamma^0) P_- \psi \quad (88)$$

$$= (\psi^\dagger P_-) \gamma^0 P_- \psi \quad (89)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \psi \quad (90)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_L \psi_L = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \psi \quad (91)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - (\gamma^5)^2)}{4} \right) \psi \quad (92)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 - \gamma^5)^2 = 0$ y así

$$\bar{\psi}_L \psi_L = 0 \quad (93)$$

Finalmente

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R \quad (94)$$

Es decir que no se conserva la helicidad.

En el caso del pseudo-escalar

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi = (\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L) \gamma^5 (\psi_R + \psi_L) \quad (95)$$

$$= \bar{\psi}_R \gamma^5 \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^5 \psi_R + \bar{\psi}_R \gamma^5 \psi_L + \bar{\psi}_L \gamma^5 \psi_L \quad (96)$$

Veamos término a término:

Primer término

$$\bar{\psi}_R \gamma^5 \psi_R = (\psi_R^\dagger \gamma^0) \gamma^5 P_+ \psi \quad (97)$$

$$= (\psi^\dagger P_+) \gamma^0 \gamma^5 P_+ \psi \quad (98)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^5 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (99)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_R \gamma^5 \psi_R = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^5 \right) \psi \quad (100)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - (\gamma^5)^2)}{4} \right) \gamma^5 \psi \quad (101)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 - (\gamma^5)^2) = 0$ y así

$$\bar{\psi}_R \gamma^5 \psi_R = 0 \quad (102)$$

Segundo término

$$\bar{\psi}_L \gamma^5 \psi_R = (\psi_L^\dagger \gamma^0) \gamma^5 P_+ \psi \quad (103)$$

$$= (\psi^\dagger P_-) \gamma^0 \gamma^5 P_+ \psi \quad (104)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^5 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (105)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_L \gamma^5 \psi_R = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^5 \right) \psi \quad (106)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 + \gamma^5)^2}{4} \right) \gamma^5 \psi \quad (107)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 + \gamma^5)^2 = 2 + 2\gamma^5$ y así

$$\bar{\psi}_L \gamma^5 \psi_R \neq 0 \quad (108)$$

Tercer término

$$\bar{\psi}_R \gamma^5 \psi_L = (\psi_R^\dagger \gamma^0) \gamma^5 P_- \psi \quad (109)$$

$$= (\psi^\dagger P_+) \gamma^0 \gamma^5 P_- \psi \quad (110)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 + \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^5 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (111)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_R \gamma^5 \psi_L = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^5 \right) \psi \quad (112)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - \gamma^5)^2}{4} \right) \gamma^5 \psi \quad (113)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 - \gamma^5)^2 = 2 - 2\gamma^5$ y así

$$\bar{\psi}_R \gamma^5 \psi_L \neq 0 \quad (114)$$

Cuarto término

$$\bar{\psi}_L \gamma^5 \psi_L = (\psi_L^\dagger \gamma^0) \gamma^5 P_- \psi \quad (115)$$

$$= (\psi^\dagger P_-) \gamma^0 \gamma^5 P_- \psi \quad (116)$$

$$= \psi^\dagger \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 \right) \left(\gamma^5 \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \right) \psi \quad (117)$$

Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\bar{\psi}_L \gamma^5 \psi_L = \psi^\dagger \left(\gamma^0 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \left(\frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^5 \right) \psi \quad (118)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left(\frac{(1 - (\gamma^5)^2)}{4} \right) \gamma^5 \psi \quad (119)$$

Y $(\gamma^5)^2 = 1$ entonces $(1 - (\gamma^5)^2) = 0$ y así

$$\bar{\psi}_L \gamma^5 \psi_L = 0 \quad (120)$$

Finalmente

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi = \bar{\psi}_R \gamma^5 \psi_L + \bar{\psi}_L \gamma^5 \psi_R \quad (121)$$

Es decir que no se conserva la helicidad.

Exercici 5: Troba la implementació de la conjugació de càrrega en un camp complex escalar. És possible acoblar l'electromagnetisme via acoblament mínim a un camp escalar real?

Resposta:

La densitat lagrangiana d'un mesó escalar lliure complex és

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \frac{1}{2} m^2 \phi^* \phi.$$

Si el mesó escalar està acoblat a un camp electromagnètic, la densitat lagrangiana es pot trobar a través de l'acoblament mínim, és a dir, $\partial_\mu \phi \rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$ i $\partial^\mu \phi^* \rightarrow (\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^*$, on e és la càrrega del mesó i A^μ és el 4-potencial:

$$\mathcal{L}_{em} = (\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi.$$

Fent servir les equacions d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0,$$

i la mateixa expressió per al camp conjugat ϕ^* , es poden trobar fàcilment les equacions dels camps. Els resultats són:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi &= -2ieA^\mu \partial_\mu \phi - ie\phi \partial_\mu A^\mu \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi^* &= 2ieA^\mu \partial_\mu \phi^* + ie\phi^* \partial_\mu A^\mu. \end{aligned}$$

La conjugació de càrrega implica canviar el signe de les càrregues e , de manera que queda clar que el camp complex conjugat satisfà l'equació del camp conjugat de càrrega: $\phi_c = \phi^*$, on el subíndex c significa que el camp és el conjugat de càrrega. El mateix raonament és vàlid per a dir que $\phi_c^* = \phi$.

Si el camp fos real, $\phi^* = \phi$, de manera que es verificaria que $\phi_c = \phi$, fet que només és possible si el mesó no té càrrega, de manera que és impossible acoblar l'electromagnetisme a un camp escalar real.

Exercici 6: Verifica que la matriu

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & I \end{pmatrix}$$

canvia la representació de Dirac a la de Majorana, i.e., $\gamma_M = U\gamma_D U^\dagger$.

Resposta:

Comencem amb γ^0 : en la representació de Dirac,

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Si apliquem una transformació sota la matriu U , i fem servir que $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$, obtenim que

$$U\gamma_D^0 U^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

que coincideix amb la representació de Majorana de la matriu γ^0 .

Ara, tornem a $\{\sigma^i, \sigma^j\}$, en particular, $\sigma^i \sigma^2 + \sigma^2 \sigma^i = 2\delta^{i2}$. Si multipliquem per σ^2 per la dreta, obtenim que $\sigma^i + \sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = 2\delta^{i2} \sigma^2$. Aquest resultat serà útil en el càlcul que segueix.

Ara ja podem procedir a la transformació sota U de les matrius γ^i :

$$\begin{aligned} U\gamma_D^i U^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^2 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & -\sigma^i \sigma^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [\sigma^i, \sigma^2] & -(\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 + \sigma^i) \\ \sigma^2 \sigma^i \sigma^2 + \sigma^i & [\sigma^i, \sigma^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\epsilon^{i2k} \sigma^k & -\sigma^2 \delta^{i2} \\ \sigma^2 \delta^{i2} & i\epsilon^{i2k} \sigma^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aquesta darrera expressió coincideix amb la representació de Majorana de l'àlgebra de Clifford:

$$\gamma_M^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 7:

Fes servir les regles enunciades per tal de solucionar els exercicis següents. Agafa $n=3$, i.e., treballarem amb representacions d' $SU(3)$.

(a) Quines de les següents taules de Young són admissibles?

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

(b) Fes servir la regla (2vi) per a determinar les dimensions de les següents dues representacions:

$$\square \quad \square \square$$

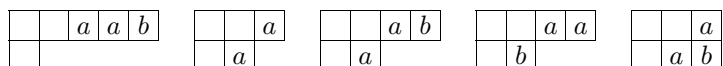
Escriu les taules de Young per a les corresponents representacions conjugades (regla 2ix).

(c) Calcula la dimensió de la representació corresponent a la taula de Young



fent servir la regla (2vi), i després verifica que la regla del ganxo (2vii) duu al mateix resultat.

(d) Volem calcular el producte tensorial de dues representacions. Com a pas preliminar, considerem els següents diagrames:

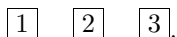


Fent servir la regla 2(vii)III, digues quins d'aquests diagrames són admissibles i quins cal descartar.

(e) Fent servir la regla (2viii), calcula $3 \otimes 3$, $3 \otimes \bar{3}$, i $8 \otimes 8$. Escribeu la resposta final en termes de les dimensions de les representacions (i no en termes de les taules).

Resposta:

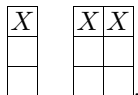
- (a) Només és acceptable la segona taula. L'última està prohibida perquè l'índex de les capses ha de córrer d'1 a 3, és a dir que el 4 no està permès. Les altres taules (a part de la segona) estan prohibides ja sigui perquè els índexs d'una fila no haurien de créixer, i ho fan, o perquè els índexs d'una columna haurien de créixer, i no ho fan.
- (b) La dimensió de la primera representació és 3; les taules de Young corresponents són



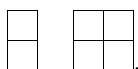
La dimensió de la segona representació és 6; les taules de Young corresponents són



Per tal de trobar les representacions conjugades, complementem les taules de l'exercici per tal d'obtenir una taula rectangular amb 3 files. Les taules originals estan marcades amb una X per tal de distingir-les de les altres que produeixen el rectangle de 3 files:



Si hom rota les capses no creuades, obté les representacions conjugades de les taules de Young originals:



(c) Totes les taules de Young admissibles d'aquesta representació són

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} .$$

En total són 8, de manera que la dimensió de la representació és 8.

La regla del ganxo dóna, per a totes les capses, els següents valors per a les longituds de ganxo h_i i distàncies d_i :

$$h_i : \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad d_i : \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array},$$

El càlcul de la dimensió a través de la regla del ganxo dóna

$$D = \prod \frac{3+d_i}{h_i} = \left(\frac{3+0}{3}\right) \left(\frac{3+1}{1}\right) \left(\frac{3-1}{1}\right) = 8,$$

que coincideix amb el valor trobat per comptatge directe.

- (d) El primer i tercer diagrames no són permesos perquè si un comença a llegir de dreta a esquerra i cap avall, un troba primer una 'b' abans de la primera 'a', fet que no verifica la regla.

(e)

- $3 \otimes 3 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} = 6 \oplus \bar{3}$
- $3 \otimes \bar{3} = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} = 8 \oplus 1$
- $8 \otimes 8 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline a & b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & b & \\ \hline \end{array} =$
 $= 1 \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & b & \\ \hline \end{array} = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27$